Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 6 im Wintersementer 2020/21 (am 4.12.20)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

8 Beispiele für lineare algebraische Gruppen

8.1 Beispiel 1: die additive Gruppe G_a

Sei G = $\mathbb{A}^1$ (= k als Menge) mit der Addition als Gruppenoperation, d.h. die Gruppenstruktur ist gegeben durch

μ: G × G $\longrightarrow$ G, (x, y) $\mapsto$ x+y,

i: G $\longrightarrow$ G, x $\mapsto$ -x,

e: G$\longrightarrow$G, x $\mapsto$ 0.

Der Koordinatenring von G ist

$$k[G] = k[\mathbb{A}^1] = k[T] \quad \text{(eine Unbestimmte).}$$

Die zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen sind:

$\Delta = \mu^*: k[T] \longrightarrow k[T]\otimes k[T] \cong k[T, U], p(T) \mapsto p(T+U)$,

$\iota = i^*: k[T] \longrightarrow k[T], p(T) \mapsto p(-T)$.

$\varepsilon = e^*: k[T] \longrightarrow k, p(T) \mapsto p(0)$.

Man beachte, es gilt

$\mu^*(p)(T,U) = (p\circ\mu)(T,U) = p(\mu(T,U)) = p(T+U)$.
$i^*(p)(T) = (p\circ i)(T) = p(i(T)) = p(-T)$.
$e^*(p)(T) = (p\circ e)(T) = p(e(T)) = p(0)$.

Die affine Gerade $\mathbb{A}^1$ mit dieser Gruppen-Operation wird mit

$\mathbf{G}_a$

bezeichnet und heißt <u>additive Gruppe</u>.

Für jeden Teilkörper F von k ist der Polynomring F[T] eine F-Strutur von k[T], definiert also eine F-Struktur der Gruppe.

8.2 Beispiel 2: die multiplikative Gruppe G_m

Sei G = $\mathbb{A}^1$ - {0} (= k-{0} als Menge) mit der Multiplikation als Gruppenoperation, d.h. die Gruppenstruktur ist gegeben durch

μ: G × G $\longrightarrow$ G, (x, y) $\mapsto$ x•y,

i: G $\longrightarrow$ G, x $\mapsto$ x^{-1},

$e: G \longrightarrow G,\ x \mapsto 1.$

Der Koordinatenring von G ist

$$k[G] = k[\mathbb{A}^1\text{-}\{0\}] = k[T]_T = k[T,T^{-1}] \text{ (eine Unbestimmte).}$$

Die zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen sind:

$\Delta = \mu^*: k[T,T^{-1}] \longrightarrow k[T,T^{-1}]\otimes k[T,T^{-1}] \cong k[T,T^{-1},U,U^{-1}],\ p(T) \mapsto p(T\bullet U),$

$\iota = i^*: k[T,T^{-1}] \longrightarrow k[T,T^{-1}],\ p(T) \mapsto p(T^{-1}).$

$\varepsilon = e^*: k[T] \longrightarrow k,\ p(T) \mapsto p(1).$

Die affine Gerade $\mathbb{A}^1$-{0} ohne den Ursprung mit dieser Gruppen-Operation wird mit

$\mathbf{G}_m$ oder $\mathbf{GL}_1$

bezeichnet und heißt multiplikative Gruppe.

Für jede von 0 verschiedene ganze Zahl n ist

$\phi: \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}_m,\ x \mapsto x^n,$

ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen.
Ist die Charakteristik von k eine Primzahl, sagen wir

$\mathrm{Char}(k) = p,$

und n eine Potenz von p, so ist ϕ ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, jedoch keiner von algebraischen Gruppen, denn

$\phi^*: k[T, T^{-1}] \longrightarrow k[T, T^{-1}],\ p(T) \mapsto p(T^n),$

ist nicht surjektiv für $n \ne \pm 1$. (vgl. Bemerkung 1.4.7(vi)).Die Abbildung

$\phi: \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}_m,\ x \mapsto x^p,$

heißt Frobenius-Morphismus von $\mathbf{G}_m$.

8.3 Beispiel 3: die allgemeine lineare Gruppe $\mathbf{GL}_n$

Sei

$$\mathbf{M}_n$$

die Menge der n×n-Matrizen mit Einträgen aus k. Wir können diese Menge mit dem k^{n^2} identifizieren. Die Determinante definiert eine reguläre Funktion

$$\det: k^{n^2} \longrightarrow k$$

auf dem k^{n^2}. Die allgemeine lineare Gruppe ist definiert als die offene Hauptmenge

$$G := D(\det) = \{A \in \mathbf{M}_n \mid \det(A) \ne 0\}$$

mit der Matrizen-Multiplikation als Operation, d.h. die Gruppenstruktur ist gegeben durch

$$\mu: G \times G \longrightarrow G,\qquad ((x_{ij}), (y_{ij})) \mapsto (x_{ij})\bullet(y_{ij}) = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} x_{i\nu}\bullet y_{\nu j}\Big),$$

$$i: G \longrightarrow G,\qquad (x_{ij}) \mapsto (x_{ij})^{-1} = \det(x)^{-1}\bullet(A_{ji}(x)),$$

$$e: G \longrightarrow G,\qquad (x_{ij}) \mapsto (\delta_{ij}).$$

Dabei sollen die $A_{ij}(x)$ die adjungierten Unterdeterminanten von $x=(x_{ij})$ bezeichnen.

Der Koordinatenring der Gruppe ist

$$k[G] = k[T_{ij}\ ,\ \det(T_{ij})^{-1} \mid i,j = 1,\dots, n]$$

mit Unbestimmten T_{ij}.
Die zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen sind:

$$\Delta=\mu^*\colon k[G]\longrightarrow k[G]\otimes k[G],\ p(\dots,T_{ij},\dots) \mapsto p(\dots, \sum_{\nu=1}^{n} T_{i\nu}\otimes T_{\nu j},\dots),$$

$$\iota = i^*\colon k[G] \longrightarrow k[G],\ p(\dots,T_{ij},\dots) \mapsto p(\dots,\det(T)^{-1}\bullet(A_{ji}(T)),\dots).$$

$$\varepsilon = e^*\colon k[G] \longrightarrow k,\ p(\dots,T_{ij},\dots) \mapsto p(\dots,\delta_{ij},\dots).$$

Dabei soll T die Matrix der T_{ij} bezeichnen.
Die offene Hauptmenge G = D(det) mit dieser Gruppen-Operation wird mit

$$\mathbf{GL}_n$$

bezeichnet und heißt allgemeine lineare Gruppe.
Für n = 1 erhalten wir gerade das vorige Beispiel 2.

Da $\mathbf{M}_n$ eine irreduzible Varietät ist, ist auch die offene Teilmenge $\mathbf{GL}_n$ irreduzibel (vgl. 1.2.3(i) und Bemerkung 1.2.3). Insbesondere ist

$$\dim \mathbf{GL}_n = \dim \mathbf{M}_n = n^2$$

(vgl. 1.8.1.1).

8.4 Beispiel 4: abgeschlossenen Untergruppen der GL_n

Eine <u>abgeschlossene Untergruppe</u> H einer algebraischen Gruppe G besitzt die Struktur einer algebraischen Gruppe, für welche die natürliche Einbettung

$$j\colon H \hookrightarrow G$$

ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen ist. Aus der Multiplikation

$$\mu\colon G\times G \longrightarrow G$$

erhält man durch Einschränken auf H (d.h. durch Zusammensetzen mit j×j) eine reguläre Abbildung

$$\mu|_{H\times H} = \mu\circ(j\times j)\colon H\times H \longrightarrow G,$$

deren Bild ganz in H liegt, also eine reguläre Abbildung

$$\mu'\colon H\times H \longrightarrow H.$$

Analog erhält man durch Einschränken des Invertierungsmorphismus $i\colon G \longrightarrow G$ auf H eine reguläre Abbildung

$$i'\colon H \longrightarrow H,$$

welcher den Übergang zum inversen Element für H beschreibt. Die drei kommutativen Diagramme für H erhält man aus denen für G durch Einschränken auf H.

Jede Untergruppe der $\mathbf{GL}_n$, welche abgeschlossen ist in der Zariski-Topologie, ist damit eine lineare algebraische Gruppe. Hier ist eine Liste von Beispielen.

(a) <u>Die endlichen Untergruppen der</u> $\mathbf{GL}_n$.

Jede einpunktige Menge einer algebraischen Menge X ist abgeschlossen, denn für $x \in X$ gilt

$$\{x\} = V(M_x)$$

Dabei sei M_x das maximale Ideal der Funktionen von $k[X]$ mit der Nullstelle x. Damit ist aber auch jede endliche Teilmenge von X abgeschlossen.

(b) Die Gruppe $\mathbf{D}_n$ der nicht-singulären Diagolnalmatrizen.

Es gilt

$$\mathbf{D}_n = \{(x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid x_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j\},$$

d.h. $\mathbf{D}_n$ besteht aus den gemeinsamen Nullstellen in $\mathbf{GL}_n$ der linearen Polynome x_{ij} mit $i \neq j$.

(c) Die Gruppe $\mathbf{T}_n$ der oberen Dreiecksmatrizen $X = (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n$ mit $x_{ij}=0$ für $i > j$.

$$\mathbf{T}_n = \{ (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid x_{ij}=0 \text{ für } i > j \}.$$

(d) Die Gruppe $\mathbf{U}_n$ der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, d.h. der $X=(x_{ij}) \in \mathbf{T}_n$ für welche die Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind.

$$\mathbf{U}_n = \{ (x_{ij}) \in \mathbf{T}_n \mid x_{ii} - 1 = 0 \text{ für } i = 1,\dots, n \},$$

(e) Die spezielle lineare Gruppe $\mathbf{SL}_n := \{ X \in \mathbf{GL}_n \mid \det(X) = 1 \}$.

$$\mathbf{SL}_n = \{ x \in \mathbf{GL}_n \mid \det(x) - 1 = 0 \}.$$

(f) Die orthogonale Gruppe $\mathbf{O}_n := \{ X \in \mathbf{GL}_n \mid X^T \bullet X = 1 \}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_n &= \{ x \in \mathbf{GL}_n \mid x^T \bullet x = 1 \} \\ &= \{ (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu i} x_{\nu j} = \delta_{ij} \text{ für } i,j = 1,\dots,n \}\end{aligned}$$

(g) Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathbf{SO}_n := \mathbf{O}_n \cap \mathbf{SL}_n$.

$$\mathbf{SO}_n = \mathbf{O}_n \cap \mathbf{SL}_n = \{ x \in \mathbf{O}_n \mid \det(x) = 1 \}$$

(h) Die symplektische Gruppe $\mathbf{Sp}_{2n} = \{ X \in \mathbf{GL}_n \mid X^T \bullet \mathbf{J} \bullet X = 1 \}$ mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei soll 1_n die $n\times n$-Einheitsmatrix bezeichnen.

$$\begin{aligned}\mathbf{Sp}_{2n} &= \{ x \in \mathbf{GL}_n \mid x^T \bullet \mathbf{J} \bullet x = 1 \} \\ &= \{ (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_{\mu i} \bullet a_{\mu\nu} \bullet x_{\nu j} = \delta_{ij} \text{ für } i,j=1,\dots,n \}\end{aligned}$$

Dabei seien die a_{ij} die Einträge der Matrix J.

8.5 Direkte Produkte von algebraischen Gruppen

Seien G’ und G” algebraische Gruppen. Dann ist die Varietät G’×G” mit der Produkt-Gruppen-Struktur eine algebraische Gruppe.

Beweis. Wir bezeichnen die Morphismen, welche die Gruppen-Struktur von G' bzw. G" definieren mit

$$\mu', i', e', 1' \text{ bzw. } \mu'', i'', e'', 1''.$$

Sei $G := G' \times G''$ das Produkt der beiden Varietäten G' und G". Weiter seien

$$\sigma: G'\times G'' \longrightarrow G''\times G' \text{ und } \tau: G''\times G' \longrightarrow G'\times G''$$

die Morphismen, welche die beiden Faktoren vertauschen, d.h. die Zusammensetzung mit der Projektion auf den i-ten Faktor soll die Projektion auf (2-i)-ten Faktor sein für i = 1,2.

Den Produkt-Morphismus

$$\mu: G\times G \longrightarrow G$$

definieren wir als den Morphismus, welcher aus

$$\mu'\times\mu'': G'\times G'\times G''\times G'' \longrightarrow G'\times G''$$

durch Zusammensetung mit dem Morphismus

$$id\times\tau\times id: G'\times G''\times G'\times G'' \longrightarrow G'\times G'\times G''\times G''$$

ensteht, der die beiden inneren Faktoren permutiert.
Der Invertierungsmorphismus von $G = G'\times G''$ wird definiert als

$$i = i'\times i'': G'\times G'' \longrightarrow G'\times G''.$$

Wir haben die Kommutativität der drei Diagramme zu beweisen, welche für die Gruppenaxiome von G stehen. Für jedes dieser drei Diagramme nehmen wir die entprechenden Diagramme für G' und G" her und bilden die direkten Produkte aller einander entsprechender Morphismen. Diese Produkt-Morphismen setzen sich zu einem kommutativen Diagramm zusammen, welches sich vom eigentlich interessierenden Diagramm nur durch eine Permutation der Faktoren unterscheidet. Durch Ausführen dieser Permuation erhalten wir das gewünschte Diagramm.
Zum Beipspiel gehen wir zum Beweis des Assoziativgesetzes für G von den Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} G'\times G'\times G' & \xrightarrow{\mu'\times id} & G'\times G' \\ {\scriptstyle id\times\mu'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu'} \\ G'\times G' & \xrightarrow{\mu'} & G' \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} G''\times G''\times G'' & \xrightarrow{\mu''\times id} & G''\times G'' \\ {\scriptstyle id\times\mu''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu''} \\ G''\times G'' & \xrightarrow{\mu''} & G'' \end{array}$$

aus. Deren Kommutativität impliziert die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} (G'\times G'\times G')\times(G''\times G''\times G'') & \xrightarrow{(\mu'\times id)\times(\mu''\times id)} & (G'\times G')\times(G''\times G'') \\ {\scriptstyle (id\times\mu')\times(id\times\mu'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu'\times\mu''} \\ (G'\times G')\times(G''\times G'') & \xrightarrow{\mu'\times\mu''} & G'\times G'' \end{array}$$

Durch Zusammensetzen mit Isomorphismen, welche die Faktoren in geigneter Weise permutieren, erhalten wir das Assoziativgesetz für G. In derselben Weise gehen wir bei den anderen beiden Axiomen vor.
QED.

8.6 Eine einfache Beobachtung

Sei G eine algebraische Gruppe. Für jedes $g \in G$ definieren dann die Multiplikation von links und rechts Isomorphismen von affinen Varietäten

$$L_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto g\cdot x, \text{ und } R_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto x\cdot g^{-1}.$$

Wir werden diese Tatsache sehr oft ohne weitere Hinweise im folgenden benutzen. Wir nennen diese Isomorphismen <u>Linkstranslation</u> bzw. <u>Rechtstranslation</u> mit g.

Bemerkungen

(i) Die Linkstranslation mit g,

$$L_g: G \xrightarrow{(g,id)} G\times G \xrightarrow{\mu} G,$$

kann man als Einschränkung der Gruppen-Multiplikation μ auf die abgeschlossene Teilmenge

$$G \cong \{g\} \times G$$

von G×G auffassen.

(ii) Die Rechtstranslation mit g,

$$R_g: G \xrightarrow{(id,g^{-1})} G\times G \xrightarrow{\mu} G,$$

kann man als Einschränkung der Gruppen-Multiplikation μ auf die abgeschlossenen Teilmenge

$$G \cong G\times\{g^{-1}\}$$

von G×G auffassen.

9. Die Komponente der Eins

9.1 Saty

Sei G eine algebraische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt genau eine irreduzible Komponente G^0 von G, welche das neutrale Element $e \in G$ enthält. Diese ist ein abgeschlossener Normalteiler von G mit endlichem Index in G.

(ii) G^0 ist die einzige Zusammenhangskomponente von G, welche das neutrale Elemente e enthält.

(iii) Jede abgeschlossene Untergruppe von G mit endlichem Index enthält G^0.

Bemerkungen

(i) Der nachfolgende Beweis zeigt, jede algebraische Gruppe G ist die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten, die gleichzeitig ihre Zusammenhangskomponenten sind. Für algebraische Gruppen fallen also die Begriffe "Zusammenhangskomponente" und "irrduzible Komponente" zusammen. Eine algebraische Gruppe ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.

(ii) Der nachfolgende Beweis verwendet eine grundlegende Eigenschaft algebraischer Varietäten, auf die wir bisher nicht eingegangen sind: das Produkt von affinen algebraichen Varietäten, sagen wir

$$X\times Y \text{ mit X und Y affine algebraische Varietäten}$$

ist irreduzibel, falls X und Y es sind

$$X \text{ und } Y \text{ irreduzibel} \Rightarrow X\times Y \text{ irreduzibel.}$$

(vgl. 1.5.4 (ii)).

Beweis. Zu (i). Seien

$$X \subseteq G \text{ und } Y \subseteq G$$

irreduzible Kompoenten von G, welche die Eins $e \in G$ enthalten. Sind

$$\mu: G\times G \longrightarrow G \text{ und } i: G \longrightarrow G$$

die Multiiplikation von G bzw. die Invertierungsabbildung, so ist

$$X\bullet Y := \mu(X\times Y)$$

eine irreduzible Teilmenge von G, und dasselbe gilt für deren Abschließung

$$\overline{X\bullet Y}$$

Wegen

$$X \subseteq \overline{X\bullet Y} \text{ und } Y \subseteq \overline{X\bullet Y}$$

und weil X und Y als Komponenten von G maximale irreduzible Teilmengen von G sind, folgt

$$X = \overline{X\bullet Y} \text{ und } Y = \overline{X\bullet Y},$$

und damit insbesondere auch

$$X = Y.$$

Damit sind Existenz und Eindeutigkeit von G^0 bewiesen.

G^0 ist eine abgeschlossene Untergruppe von G.

Als irreduzible Komponente von G ist $X = G^0$ abgeschlossen in G.

Wegen $X = \overline{X\bullet X}$ ist X abgeschlossen gegenüber Multiplikation: mit g', g"$\in$X gilt $g'\bullet g'' \in X\bullet X \subseteq \overline{X\bullet X} = X$, d.h. μ induziert eine Abbildung

$$\mu|_X: X \times X \longrightarrow X.$$

Weil i: G $\longrightarrow$ G ein Isomorphismus ist, welcher das Element e in sich abbildet, ist $X^{-1} = i(X)$ eine irreduzible Komponente von G, welche e enthält, d.h. es ist $i(X) = X$ und i induziert einen Isomorphismus

$$i|_X : X \xrightarrow{\cong} X$$

von affinen algebraischen Varietäten. Damit ist X eine abgeschlossene Untergruppe von G.

G^0 ist Normalteiler mit endlichem Index.

Für jedes $x \in G$ ist

$$\sigma_x := R_x \circ L_x : G \longrightarrow G,\ y \mapsto xyx^{-1},$$

ein Isomorphismus. Deshalb ist

$$\sigma_x(G^0)$$

eine irreduzible Komponente, welche e enthält, d.h. es ist

$$x\bullet G^0\bullet x^{-1} = \sigma_x(G^0) = G^0$$

für jedes $x \in G$, d.h. G^0 ist ein Normalteiler.

Die Nebenklassen

$$x\bullet G^0$$

von G^0 in G sind wie G^0 selbst maximale irreduzible (und abgeschlossene) Teilmengen von G, und damit Komponenten von G. Weil G als Varietät ein noetherscher Raum ist, gibt es nur endlich viele dieser Nebenklassen, d.h. der Index von G^0 in G ist endlich.

Zu (ii) und zur Bemerkung (i). Weil je zwei Nebenklassen von G^0 identisch oder disjunkt sind und diese als irreduzible Mengen auch zusammenhängend sind, folgt die Aussage der Bemerkung (i). Insbesondere gilt die Aussage von (ii).

Zu (iii). Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G mit endlichem Index in G. Dann ist

$$H^0 \subseteq H \subseteq G$$

eine Untergruppe von G, welche die Eins $e \in G$ enthält. Als abgeschlossene Untergruppe der abgeschlossenen Untergruppe H von G ist H^0 abgeschlossen in G.

Nach (i) hat H^0 einen endlichen Index in H und nach Voraussetzung ist der Index von H in G endlich. Deshalb ist auch der Index von H^0 in G endlich, und damit auch der von H^0 in G^0,

$$(G^0:H^0) \le (G:H^0) < \infty,$$

d.h. G^0 ist Vereinigung der endlich vielen paarweise disjunkten Nebenklassen $x\bullet H^0$ mit $x \in G^0$. Mit H^0 sind diese abgeschlossen. Dann ist aber H^0 als Komplement der von H^0 verschiedenen endlich vielen Nebenklassen $x\bullet H^0$ in G^0 auch offen,

$$H^0 \text{ ist abgeschlossen und offen in } G^0.$$

Weil G^0 zusammenhängend ist, folgt $H^0 = G^0$, also

$$G^0 = H^0 \subseteq H.$$

QED.

9.2 Definition

Die irreduzible Komponente einer algebraischen Gruppe G, welche das neutrale Element enthält wird mit

$$G^0$$

bezeichnet und heißt Komponente der Eins von G.

Bemerkung

Weil die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Gruppe G gerade die Nebenklassen von G^0 sind (und damit zu G^0 isomorphe algebraische Varietäten), haben sie alle dieselbe Dimension

$$\dim G = \dim G^0$$

(vgl. 1.8.1).

Index

Inhalt